$\|\bar u\|$

10/12/18

S.O.S.

Θεώρημα (Κανόνας της Αλυσίδας ή Διαφόριση σύνθετης συνάρτησης)

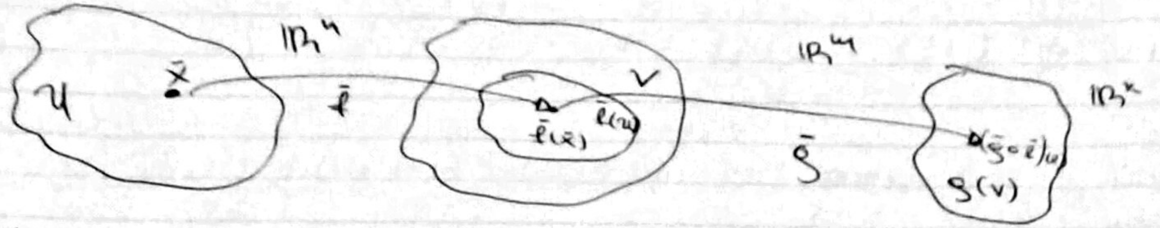
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό ($m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$), $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$ με $\bar f(U) \subset V$, $\bar g : V \to \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) και έστω $\bar f$ διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$ και η $\bar g$ διαφορίσιμη στο $\bar y = \bar f(\bar x) \in V$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $\bar g \circ \bar f : U \to \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$ και $\cancel{D(\bar g \circ \bar f)(\bar x)}$ $\boxed{D(\bar g \circ \bar f)(\bar x) = D\bar g(\bar f(\bar x))\, D\bar f(\bar x)}$

Απόδειξη: Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{\bar u \to \bar 0} \frac{(\bar g \circ \bar f)(\bar x + \bar u) - (\bar g \circ \bar f)(\bar x) - AB\bar u}{\|\bar u\|} = \bar 0$$

όπου $\cancel{B}\ B = D\bar g(\bar f(\bar x)) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ και $\overset{A}{\cancel{B}} = D\bar f(\bar x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

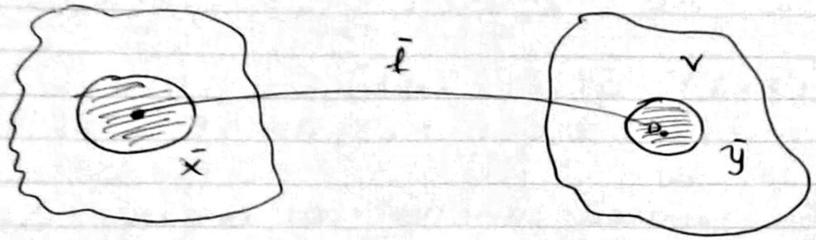
(Τεχνικές λεπτομέρειες για να είναι όλα καλά ορισμένα)



V ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, \delta_1>0: B(\bar{y},\delta_1) \subset V$

U ανοιχτό και $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$ (ως διαφορίσιμη)

$\Rightarrow \exists\, \delta_2>0 : B(\bar{x},\delta_2) \subset U$ και $\bar{f}(B(\bar{x},\delta_2)) \subset B(\bar{y},\delta_1) \subset V$



$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$

$\bar{f}(B(\bar{x},\delta_2))$ ⊛

[[⊛ αφού $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$, έχουμε ότι:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall \bar{z} \in U \cap B(\bar{x},\delta): \|\bar{f}(\bar{z}) - \bar{f}(\bar{x})\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall \bar{z} \in B(\bar{x},\delta): \bar{f}(\bar{z}) \in B(\bar{f}(\bar{x}), \varepsilon)$

αν $B(\bar{x},\delta) \subset U$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \bar{f}(B(\bar{x},\delta)) \subset B(\bar{f}(\bar{x}),\varepsilon)$

[$f(A) = \{\bar{f}(\bar{z}) : \bar{z} \in A\}$ δηλ. $\forall \bar{z} \in A: \bar{f}(\bar{z}) \in \bar{f}(A)$]]]

Έστω στα επόμενα: $\bar{h} \in B(\bar{o},\delta_2)\setminus\{\bar{o}\} \subset \mathbb{R}^n$

$\bar{k} \in B(\bar{o},\delta_1)\setminus\{\bar{o}\} \subset \mathbb{R}^m$

τότε: $\bar{x}+\bar{h} \in B(\bar{x},\delta_2)\setminus\{\bar{x}\} \subset U$ [ΑΣΚΗΣΗ]

$\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) \in B(\bar{y},\delta_1) \subset V$

$\bar{y}+\bar{k} \in B(\bar{y},\delta_1)\setminus\{\bar{y}\}$

τέλος τεχνικών λεπτομερειών

SOS θέμα εξετ.

Γνωρίζουμε: $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - B\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$

$\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) - \bar{g}(\bar{y}) - A\bar{\xi}}{\|\xi\|} = \bar{0}$

δηλ., ισοδύναμα, ότι: $\boxed{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{f}(\bar{x}) + A\bar{u} + \bar{\varphi}(\bar{u})}$ με $\boxed{\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}}$

$$\boxed{\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) = \bar{g}(\bar{y}) + B\bar{\xi} + \bar{\psi}(\bar{\xi}) \quad \text{με: } \lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}}$$

Συνεπώς $(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}+\bar{u})) =$
$= \bar{g}(\underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{=y} + \underbrace{A\bar{u} + \bar{\varphi}(\bar{u})}_{=\xi}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) + BA\bar{u} + B\bar{\varphi}(\bar{u}) +$
$+ \bar{\psi}(A\bar{u} + B\bar{\varphi}(\bar{u}))$ και πρέπει και αρκεί να δείξουμε:

$$\boxed{\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{u}) + \bar{\psi}(A\bar{u} + \bar{\varphi}(\bar{u}))}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}}$$

Αφού: $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$ με $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} B\bar{\xi} = \bar{0} = B.\bar{0}$

προκύπτει $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$ (ΑΣΚΗΣΗ)

[Έστω $\bar{u}_\nu \to \bar{0} \Rightarrow \bar{\xi}_\nu = \frac{\bar{\varphi}(\bar{u}_\nu)}{\|\bar{u}_\nu\|} \to \bar{0} \Rightarrow B\bar{\xi}_\nu \to \bar{0}$]

Επίσης, $\exists\, \delta_3 \in (0,\delta_2)\ \forall\, \bar{u} \in B(\bar{0},\delta_3) \setminus \{\bar{0}\} : \|\varphi(\bar{u})\| \leq \|\bar{u}\|$
[$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \forall \bar{u} \in B(\bar{0},\delta) \setminus \{\bar{0}\} : \frac{\|\bar{\varphi}(\bar{u})\|}{\|\bar{u}\|} < \varepsilon$] επιλέγω $\varepsilon = 1$

$= \bar\varphi_1(\bar\xi)$

Από την άλλη, αφού $\lim\limits_{\bar\xi\to\bar 0} \dfrac{\bar\varphi(\bar\xi)}{\|\bar\xi\|} = \bar 0$ δηλ., ισοδύναμα

$\bar\varphi(\bar\xi) = \|\bar\xi\|\cdot\bar\varphi_1(\bar\xi)$ με $\lim\limits_{\bar\xi\to\bar 0}\bar\varphi_1(\bar\xi) = \bar 0$

Έχουμε: $\forall \bar u \in B(\bar 0, \delta_3)\setminus\{\bar 0\}$:

$$\frac{\|\bar\varphi(A\bar u + \bar g(\bar u))\|}{\|\bar u\|} = \frac{\|A\bar u + \bar g(\bar u)\|\,\|\bar\varphi_1(A\bar u + \bar g(\bar u))\|}{\|\bar u\|} \le$$

$$\overset{(**)}{\le} (\|A\| + 1)\,\|\bar\varphi_1(A\bar u + \bar g(\bar u))\|$$

(**) $\|A\bar u\| \le \|A\|\|\bar u\|$

Όμως, αφού $\lim\limits_{\bar u\to\bar 0} A\bar u = \bar 0\ (= A\bar 0)$

$\lim\limits_{\bar u\to\bar 0} \bar g(\bar u) = \bar 0 =: \bar g(\bar 0)$

$\lim\limits_{\bar\xi\to\bar 0} \bar\varphi_1(\bar\xi) = \bar 0 =: \bar\varphi(\bar 0)$ και αφού σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής

προκύπτει $\lim\limits_{\bar u\to\bar 0}\|\bar\varphi_1(A\bar u + \bar g(\bar u))\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\bar u\to\bar 0} \dfrac{\|\bar\varphi(A\bar u + \bar g(\bar u))\|}{\|\bar u\|} = 0$ (ΑΣΚΗΣΗ) ☒

Παρατήρηση: Είδαμε $\exists D\in\mathbb{R}^{m\times n}$: $\bar f$ διαφορίσιμη $U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$, στο $\bar x$ $\Leftrightarrow$ V $\lim\limits_{\bar u\to\bar 0}\dfrac{\bar f(\bar x+\bar u) - \bar f(\bar x) - D\bar u}{\|\bar u\|} = \bar 0$

$\overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow}$ V $\exists D$: $\bar f(\bar x+\bar u) = \bar f(\bar x) + D\bar u + \bar\varphi(\bar u)$ με

$$\boxed{\lim\limits_{\bar u\to\bar 0}\frac{\bar\varphi(\bar u)}{\|\bar u\|} = \bar 0 \quad \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow}}$$

όπου $o(\|\bar u\|)$ είναι o: «μικρό όμικρον»

$\bar\varphi(\bar u) = o(\|\bar u\|)$ για $\bar u\to\bar 0$

συμβολισμός Landau: $\bar\varphi(\bar u) = o(g(\bar u))$ για $\bar u\to\bar 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\bar u\to\bar 0}\dfrac{\bar\varphi(\bar u)}{\|\bar u\|} = \bar 0$

Ενώ αν: $\exists\, \delta, c > 0\ \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta): \dfrac{\|\bar{g}(\bar{u})\|}{|g(\bar{u})|} \leq c$

γράφουμε $\bar{g}(\bar{u}) = O(g(\bar{u}))$ για $\bar{u} \to \bar{0}$
(<< μεγάλο όμικρον >> συμβολισμός Landau)

Με αυτόν τον συμβολισμό:
f διαφ/μη στο $\bar{x} \Leftrightarrow \bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{f}(\bar{x}) + D\bar{f}(\bar{x})\bar{u} + \bar{g}(\bar{u}) =: O(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

δηλ. $\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{f}(\bar{x}) + D\bar{f}(\bar{x})\bar{u} + \bar{g}(\bar{u})$ με:
$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

ΤΕΛ

Καμπύλες

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Μια απεικόνιση $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, η οποία είναι συνεχής, ονομάζεται (παραμετρική) καμπύλη και η εικόνα της $\bar{\gamma}$, δηλ. $\bar{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$, ονομάζεται καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$